структуры, ассоциированные с $\mathcal{H}$-распределением аффинного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып.20. С.30-34.

2. Д о м б р о в с к и й Р.Ф. О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,r}$ в P_n // Тез. докл. Всесоюз. науч. конф. по неевкл. геом. "150 лет геометрии Лобачевского". М., 1976. С.69.

3. О с т и а н у Н.М., Р ы ж к о в В.В., Ш в е й к и н Л.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.7-70.

4. Vidal Coste Enrique. Conexiones en las variedades custproducto y foliaciones // Collect. math. 1973. V.24. N3. P.297-324.

УДК 513.015

К ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ТОЧЕЧНЫХ СООТВЕТСТВИЙ ПАРЫ ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Т.А.Д у л а л а е в а

(Елабужский педагогический институт)

В данной работе рассматривается пара гиперраспределений в n-мерном проективном пространстве и изучается диффеоморфизм $f:\Omega\to\bar\Omega$ областей Ω и $\bar\Omega$, в которых заданы гиперраспределения Δ и $\bar\Delta$.

Отнесем области Ω и $\bar\Omega$ к подвижным проективным реперам $R^A=(A, A_i, A_n)$ и $\bar R^{A_n}=(A_n, A_i, A)$, где $A\in\Omega$, $A_n\in\bar\Omega$, $A_i\in\Delta(A)\cap\bar\Delta(A_n)$ $(i,j,k=1,2,\dots,n-1)$. Дифференциальные уравнения, определяющие пару гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$, имеют вид:

$$\omega_i^n = l_{i\alpha}\omega^\alpha, \quad \theta_i^n = \bar l_{i\alpha}\theta^\alpha, \tag{1}$$

$$\theta^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta\,\omega^\beta \qquad (\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,n}). \tag{2}$$

Известно [3], [4], что системы величин $(l_{i\alpha})$, $(\bar l_{i\alpha})$ определяют поля геометрических объектов - поля фундаментальных объектов первого порядка гиперраспределений Δ, $\bar\Delta$ соответственно. Функции (l_{ij}), (l_{in}), $(\bar l_{ij})$, $(\bar l_{in})$ образуют поля самостоятельных объектов - поля фундаментальных подобъектов первого порядка гиперраспределений. Система величин (Λ^α_β) определяет поле геометрического объекта - поле фундаментального объекта первого порядка, порождаемое рассматриваемым отображением f:

$$\begin{aligned}
&d\Lambda^i_j+\Lambda^i_j(\omega^0_0-\omega^n_n)-\Lambda^i_k\omega^k_j+\Lambda^k_j\omega^i_k=\Lambda^i_{j\alpha}\omega^\alpha+\delta^i_j\omega^0_n+\Lambda^i_n\omega^n_j,\\
&d\Lambda^i_n+\Lambda^i_n(\omega^0_0-2\omega^n_n)+\Lambda^j_n\omega^i_j=\Lambda^i_{n\alpha}\omega^\alpha+\Lambda^i_j\omega^j_n,\\
&d\Lambda^n_i+\Lambda^n_i(2\omega^0_0-\omega^n_n)-\Lambda^n_j\omega^j_i=\Lambda^n_{i\alpha}\omega^\alpha-\Lambda^j_i\omega^0_j+\Lambda^n_n\omega^n_i,\\
&d\Lambda^n_n+2\Lambda^n_n(\omega^0_0-\omega^n_n)=\Lambda^n_{n\alpha}\omega^\alpha-\Lambda^i_n\omega^0_i+\Lambda^n_i\omega^i_n.
\end{aligned}\tag{3}$$

Функции (Λ^i_j), (Λ^i_n), (Λ^n_i) образуют поля самостоятельных объектов - поля фундаментальных подобъектов первого порядка отображения f. Функция (Λ^n_n) является относительным инвариантом диффеоморфизма f.

При равенстве нулю геометрического объекта (Λ^n_i) гиперраспределения Δ и $\bar\Delta$ являются соответствующими в индуцированном отображении f_*. Обращение в нуль геометрического объекта (Λ^i_j) $(i\neq j)$ означает существование $n-1$ различных двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta, f_*(\Delta))$. Аналогично, обращение в нуль геометрического объекта $(\bar\Lambda^i_j)$ $(i\neq j)$ означает существование $n-1$ различных двойных линий пары гиперраспределений $(\bar\Delta, f_*^{-1}(\bar\Delta))$, где $\omega^\alpha=\bar\Lambda^\alpha_\beta\theta^\beta$ и $\bar\Lambda^\alpha_\beta\Lambda^\beta_\gamma=\delta^\alpha_\gamma$, $\Lambda^\alpha_\beta\bar\Lambda^\beta_\gamma=\delta^\alpha_\gamma$ [4].

ω^n - линия сети σ в области Ω, касающаяся прямой (AA_n) в точке A, принадлежит гиперраспределению $\bar\Delta$ тогда и только тогда, когда относительный инвариант (Λ^n_n) отображения f равен нулю [4]. ω^n - линия сети σ, как и θ^n - линия сети $\bar\sigma$ в области $\bar\Omega$, образ ω^n - линии в отображении f, является прямой линией тогда и только тогда, когда геометрический объект (Λ^i_n) $(i=1,2,\dots,n-1)$ обращается в нуль [3].

Точки $F^i=-\Lambda^i_i A+A_n$, $\bar F^i=-\bar\Lambda^i_i A_n+A$ являются фокусами прямой (AA_n). Обращение в нуль геометрического объекта (Λ^i_n) $(i=\overline{1,n-1})$ означает совпадение фокусов F^i и $\bar F^i$ прямой (AA_n). Фокусы F^i и $\bar F^i$ совпадают и при равенстве нулю геометрического объекта (Λ^n_i) $(i=1,2,\dots,n-1)$, т.е. при соответствии гиперраспределений Δ и $\bar\Delta$ в индуцированном отображении f_*.

Продолжая уравнения (3), получим:

$$\begin{aligned}
&d\Lambda^i_{jk}+\Lambda^i_{jk}(2\omega^0_0-\omega^n_n)-\Lambda^i_{jt}\omega^t_k+\Lambda^t_{jk}\omega^i_t-\Lambda^i_{tk}\omega^t_j=\Lambda^i_{jk\alpha}\omega^\alpha+\Lambda^i_{jn}\omega^n_k+\Lambda^i_{nk}\omega^n_j+\\
&\quad+\Lambda^i_j\Lambda^t_k\omega^n_t+\Lambda^t_j\Lambda^i_k\omega^n_t-\Lambda^i_j\omega^0_k-\Lambda^i_k\omega^0_j+\delta^i_k\Lambda^t_j\omega^0_t+\delta^i_j\Lambda^t_k\omega^0_t,\\
&d\Lambda^i_{jn}+2\Lambda^i_{jn}(\omega^0_0-\omega^n_n)-\Lambda^i_{kn}\omega^k_j+\Lambda^k_{jn}\omega^i_k=\Lambda^i_{jn\alpha}\omega^\alpha+\Lambda^i_{jk}\omega^k_n+\Lambda^i_{nn}\omega^n_j-2\Lambda^i_j\omega^0_n-\\
&\quad-\Lambda^i_n\omega^0_j+\Lambda^i_j\Lambda^k_n\omega^n_k+\Lambda^i_n\Lambda^k_j\omega^n_k+\delta^i_j\Lambda^k_n\omega^0_k,
\end{aligned}$$

Из первых $n-1$ соотношений (7) вытекает $\Lambda^1_1=\Lambda^2_2=\ldots=\Lambda^{n-1}_{n-1}$, т.е. фокусы прямой (AA_n) совпадают. Справедливо утверждение: если фокусы прямой (AA_n) различны, то произвольная линия пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ не является характеристической линией отображения f.

А. Пусть фокусы прямой (AA_n) различны. Рассмотрим ω^i - линию (i - фиксировано) сети σ и соответствующую ей θ^i - линию сети $\bar\sigma$ в отображении f. Они являются двойными линиями пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$. Для того, чтобы ω^i - линия сети σ являлась характеристической линией отображения f, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$(\Lambda^n_n l_{ii} - \Lambda^i_i \bar l_{ii})\, a^j_{ii} = \Lambda^j_n l_{ii} \bar l_{ii} \quad (j\neq i). \tag{8}$$

Откуда вытекают:

Т е о р е м а 1. Если фокусы прямой (AA_n) различны и двойные $\omega^i(\theta^i)$ - линии (i - фиксировано) пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ асимптотические, то ω^i - линия - характеристическая линия отображения f.

Т е о р е м а 2. Если фокусы прямой (AA_n) различны, ω^n-линия сети σ в области Ω - прямая и двойная ω^i - линия пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ ∇ - геодезическая [2] относительно связности ∇, индуцированной в области Ω нормализацией [6] при помощи поля нормалей первого рода (AA_n) и поля нормалей второго рода $\Delta(A)\cap\bar\Delta(A_n)$, то ω^i - линия - характеристическая линия отображения f.

Рассмотрим ω^n - линию сети σ. Ей соответствует в отображении f линия, дифференциальные уравнения которой имеют вид

$$\theta^i=\Lambda^i_n\omega^n,\quad \theta^n=\Lambda^n_n\omega^n.$$

Они являются двойными линиями отображения f. Имеем:

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы ω^n - линия сети σ, касающаяся прямой (AA_n) в точке A, была характеристической линией отображения f, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$\Lambda^{\hat i}_n\Lambda^{n-1}_{nn}-\Lambda^{n-1}_n\Lambda^{\hat i}_{nn}+(\Lambda^{n-1}_{n-1}-\Lambda^{\hat i}_{\hat i})\Lambda^{\hat i}_n\Lambda^{n-1}_n=0 \quad (\hat i=\overline{1,n-2}). \tag{9}$$

Б. Пусть фокусы прямой (AA_n) совпадают. Тогда любая линия на интегральных многообразиях пары голономных гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ является двойной линией, интегральные многообразия перспективны с центром перспективы в единственном фокусе $F^1=-\Lambda^1_1 A+A_n$ прямой (AA_n) [5].

$$d\Lambda^i_{nn}+\Lambda^i_{nn}(2\omega^0_0-3\omega^n_n)+\Lambda^k_{nn}\omega^i_k=\Lambda^i_{nn\alpha}\omega^\alpha+2\lambda^i_{nk}\omega^k_n-4\Lambda^i_n\omega^0_n+2\Lambda^i_n\Lambda^k_n\omega^n_k,$$

$$d\Lambda^n_{ij}+\Lambda^n_{ij}(3\omega^0_0-\omega^n_n)-\Lambda^n_{ik}\omega^k_j-\Lambda^n_{kj}\omega^k_i=\Lambda^n_{ij\alpha}\omega^\alpha+\Lambda^n_{in}\omega^n_j+\Lambda^n_{nj}\omega^n_i+\Lambda^n_i\Lambda^k_j\omega^n_k+$$
$$+\Lambda^n_j\Lambda^k_i\omega^n_k-2\Lambda^n_i\omega^0_j-2\Lambda^n_j\omega^0_i-\Lambda^k_{ij}\omega^0_k+2\Lambda^n_i\Lambda^n_j\omega^n,$$

$$d\Lambda^n_{in}+\Lambda^n_{in}(3\omega^0_0-\omega^n_n)-\Lambda^n_{kn}\omega^k_i=\Lambda^n_{in\alpha}\omega^\alpha+\Lambda^n_{ik}\omega^k_n-\Lambda^k_{in}\omega^0_k+\Lambda^n_{nn}\omega^n_i-$$
$$-2\Lambda^n_n\omega^0_i+\Lambda^n_i\omega^0_n+\Lambda^n_i\Lambda^k_n\omega^n_k+\Lambda^n_n\Lambda^k_i\omega^n_k,$$

$$d\Lambda^n_{nn}+3\Lambda^n_{nn}(\omega^0_0-\omega^n_n)=\Lambda^n_{nn\alpha}\omega^\alpha-\Lambda^i_{nn}\omega^0_i+2\Lambda^n_{in}\omega^i_n+2\Lambda^n_n\Lambda^i_n\omega^n_i-4\Lambda^n_n\omega^0_n.$$

Система величин $(\Lambda^\alpha_\beta,\Lambda^\alpha_{\beta\gamma})$ образует поле геометрического объекта - поле фундаментального объекта второго порядка, порождаемого рассматриваемым отображением f. Функции $(\Lambda^i_{jk}),(\Lambda^i_{jn}),(\Lambda^i_{nn}),(\Lambda^n_{ij}),(\Lambda^n_{in})$ образуют поля самостоятельных объектов - поля фундаментальных подобъектов второго порядка отображения f. Функция (Λ^n_{nn}) - относительный инвариант этого отображения.

Линия ℓ, как и линия $f(\ell)$, является линией пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$, если $\ell\subset\Delta$ и $f(\ell)\subset\bar\Delta$, т.е. они определяются уравнениями:

$$\ell:\ \omega^i=\ell^i\theta,\ \omega^n=0;\qquad f(\ell):\ \theta^i=\Lambda^i_j\ell^j\theta,\ \theta^n=0.$$

Пусть

$$\Lambda^n_i=0,\ \Lambda^j_i=0\quad (i\neq j), \tag{5}$$

т.е. существует $n-1$ различных двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ [4]. Дифференциальные уравнения, определяющие диффеоморфизм f, принимают вид:

$$\theta^i=\Lambda^i_i\omega^i+\Lambda^i_n\omega^n,\quad \theta^n=\Lambda^n_n\omega^n. \tag{6}$$

Плоскости $f(\Pi_2(\ell))$ и $\Pi_2(\bar\ell)$ ($\Pi_2(\ell),\Pi_2(\bar\ell)$ - соприкасающиеся плоскости линии $\ell\subset\Delta$, $\bar\ell=f(\ell)\subset\bar\Delta$ соответственно) совпадают при любом выборе кривой ℓ, касающейся в точке A направления (AM), где $M=\ell^iA_i$, только в том случае, когда направление (AM) (называемое характеристическим направлением отображения f [1]) удовлетворяет условиям:

$$\frac{l_{ij}e^ie^j}{\Lambda^i_i\Lambda^j_j\bar l_{ij}e^ie^j\Lambda^{\hat i}_{\hat i}}=\frac{l_{ij}e^ie^j}{\Lambda^i_i\Lambda^j_j\bar l_{ij}e^ie^j\Lambda^{n-1}_{n-1}}=\frac{e^{\hat i}_1e^{n-1}-e^{n-1}_1e^{\hat i}}{\Lambda^{\hat i}}, \tag{7}$$

где

$$\Lambda^{\hat i}=\Lambda^n_n\{\Lambda^{n-1}_{n-1}e^{n-1}[\Lambda^{\hat i}_{\hat i i}e^{\hat i}e^i+\Lambda^{\hat i}_n l_{\hat i i}\ell^{\hat i}\ell^i+\Lambda^{\hat i}_{\hat i}\ell^{\hat i}_1+(\Lambda^{\hat j}_{\hat j}-\Lambda^{\hat i}_{\hat i})a^{\hat i}_{\hat j i}\ell^{\hat j}e^i+$$
$$+(\Lambda^{n-1}_{n-1}-\Lambda^{\hat i}_{\hat i})a^{\hat i}_{n-1,i}e^{n-1}e^i]-\Lambda^{\hat i}_{\hat i}e^{\hat i}[\Lambda^{n-1}_{n-1}e^{n-1}+\Lambda^{n-1}_n l_{n-1,i}e^{n-1}e^i+\Lambda^{n-1}_{n-1}e^{n-1}_1+$$
$$+(\Lambda^{\hat k}_{\hat k}-\Lambda^{n-1}_{n-1})a^{n-1}_{\hat k i}\ell^{\hat k}e^i]\}+(\Lambda^{\hat i}_{\hat i}e^{\hat i}\Lambda^{n-1}_n-\Lambda^{n-1}_{n-1}e^{n-1}\Lambda^{\hat i}_n)\Lambda^i_i\Lambda^j_j\bar l_{ij}e^ie^j$$

$$(\hat i,\hat j=\overline{1,n-2};\ \hat i\neq\hat j).$$

Дифференциальные уравнения, определяющие диффеоморфизм f, принимают вид:

$$\theta^i = \Lambda^1_1 \omega^i + \Lambda^i_n \omega^n, \quad \theta^n = \Lambda^n_n \omega^n.$$

Учитывая $\Lambda^1_1 = \Lambda^2_2 = \ldots = \Lambda^{n-1}_{n-1}$, равенства (7) принимают вид:

$$(\Lambda^n_n L_{ij} - \Lambda^1_1 \bar{L}_{ij})(\ell^{\hat{i}}_1 \ell^{n-1} - \ell^{n-1}_1 \ell^{\hat{i}}) \ell^i \ell^j = (\Lambda^{n-1}_n \ell^{\hat{i}} - \Lambda^{\hat{i}}_n \ell^{n-1}) L_{ij} e^i e^j \bar{L}_{kp} e^k e^p. \quad (10)$$

Известно, что при смещении точки A вдоль линии ℓ, принадлежащей гиперраспределению Δ, d^2A принадлежит плоскости $\Delta(A)$ тогда и только тогда, когда

$$L_{ij} e^i e^j = 0. \quad (11)$$

Линии, принадлежащие гиперраспределению Δ, касательные направления которых удовлетворяют условию (11), называются асимптотическими на гиперраспределении Δ. Аналогично, линии, принадлежащие гиперраспределению $\bar{\Delta}$, касательные направления которых удовлетворяют условию $\bar{L}_{ij} \bar{e}^i \bar{e}^j = 0$, называются асимптотическими на гиперраспределении $\bar{\Delta}$.

Если фокусы прямой (AA_n) совпадают, то дифференциальные уравнения линии $\bar{\ell} = f(\ell)$, образа линии ℓ в отображении f, пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$ имеют вид:

$$\theta^i = \Lambda^1_1 e^i \theta, \qquad \theta^n = 0,$$

и она является асимптотической на гиперраспределении $\bar{\Delta}$ тогда и только тогда, когда $L_{ij} e^i e^j = 0$. Справедлива

Т е о р е м а 4. Если фокусы прямой (AA_n) совпадают, то асимптотической двойной линии ℓ пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$ соответствует в отображении f асимптотическая двойная линия $\bar{\ell}$ тогда и только тогда, когда

$$\bar{L}_{ij} = k L_{ij},$$

т.е. тензоры (L_{ij}) и $(\bar{L}_{ij})$ пропорциональны.

Из соотношений (10) имеем:

Т е о р е м а 5. Если фокусы прямой (AA_n) совпадают и асимптотической двойной линии ℓ пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$ соответствует в отображении f асимптотическая двойная линия, то она характеристическая линия отображения f.

Рассмотрим ω^n - линию сети σ. Если фокусы прямой (AA_n) совпадают, то соотношения (9) принимают вид:

$$\Lambda^{\hat{i}}_n \Lambda^{n-1}_{nn} - \Lambda^{n-1}_n \Lambda^{\hat{i}}_{nn} = 0.$$

Т е о р е м а 6. Если фокусы прямой (AA_n) совпадают, то ω^n - линия сети σ, касающаяся прямой (AA_n) в точке A, является характеристической линией отображения f тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \Lambda^i_n \\ \Lambda^i_{nn} \end{pmatrix} = 1$$

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств // Вопросы дифф. геометрии / МГПИ им. В.И.Ленина. М., 1970. Т.1. С.28-40.

2. Б а з ы л е в В.Т. О ∇-сопряженных сетях в пространствах аффинной связности // Изв. вузов. Матем. 1974. №5. С.25-30.

3. Д у л а л а е в а Т.А. К геометрии пары гиперраспределений в проективном пространстве P_n // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1981. Вып.12. С.23-26.

4. Д у л а л а е в а Т.А. О некоторых свойствах двойных линий пары гиперраспределений // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. Вып.15. С.14-18.

5. Д у л а л а е в а Т.А. К геометрии двойных линий пары гиперраспределений // Тезисы докл. IX Всесоюз. геометр. конф. Кишинев, 1988. С.108.

6. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности / ГИТТЛ. М.; Л., 1950.

УДК 514.75

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ РАССЛОЕНИЯХ И СВЯЗНОСТЯХ В НИХ НА ОСНАЩЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Е.Т.И в л е в

(Томский политехнический институт)

Данная статья является продолжением статьи [1] и посвящена изучению некоторых инвариантных расслоений и связностей в них, которые ассоциируются с оснащенной многомерной поверхностью проективного пространства. С помощью этих связностей дается дополнительная геометрическая характеристика m-поверхностям S^k_m $(k=\overline{1,4})$ и S^{1234}_m в P_{n+1}, изученным в [1].

6 Зак. 1399

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1].

Рассмотренные в [1] инвариантные геометрические образы позволяют изучить следующие расслоенные пространства и связности в них в смысле [2] и [3], имеющие специальный вид для оснащенных m-поверхностей, изученных в [1].

1. Расслоение $T_{m,m} = (S_m, L_m)$

Базой касательного расслоенного пространства $T_{m,m}$ является m-поверхность S_m, а слоем, соответствующим каждой точке $A_0 \in S_m$, является m-плоскость L_m, касательная к S_m в точке A_0. В этом пространстве существует аффинная связность P которая отображает смежную m-плоскость L'_m на исходную L_m в направлении нормали Картана P_{I0}. Формами этой связности являются $\omega_{\bar\alpha}^{\bar\beta}$ $(\bar\alpha,\bar\beta,\bar\gamma = \overline{0,m})$, которые в силу ([1], (1)-(3), (11), (23)) удовлетворяют структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega_{\bar\alpha}^{\bar\beta} = \omega_{\bar\alpha}^{\bar\gamma} \wedge \omega_{\bar\gamma}^{\bar\beta} + P_{\bar\alpha\sigma\gamma}^{\bar\beta}\, \omega_0^\sigma \wedge \omega_0^\gamma \quad (\alpha,\beta,\gamma,\sigma = \overline{1,m}). \tag{1}$$

Здесь компоненты тензоров кручения $P_{o\sigma\gamma}^{\bar\alpha}$ и кривизны $P_{\alpha\sigma\gamma}^{\bar\beta}$ определяются по формулам

$$P_{o\sigma\gamma}^{o} = 0,\ P_{o\sigma\gamma}^{\beta} = 0,\ P_{\alpha\sigma\gamma}^{\bar\beta} = \frac{1}{2} A_{\alpha[\sigma}^{\hat\alpha} A_{|\hat\alpha|\gamma]}^{\bar\beta} \quad (\hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma,\hat\sigma = \overline{m+1,n+1}). \tag{2}$$

Каждой паре линейно независимых направлений $v = (A_0 A_\sigma) v^\sigma \in L_m$ и $w = (A_0 A_\gamma) w^\gamma \in L_m$ отвечает центропроективное преобразование m-плоскости L_m в себя с центром в точке A_0:

$$P(v,w) = \left\{ P_{\bar\alpha\sigma\gamma}^{\bar\beta} v^\sigma w^\gamma \right\}. \tag{3}$$

Геометрическая интерпретация этого преобразования такая же, как и проективитета $R(v,w)$ в ([4], (8)).

Из (3) в силу ([1], (32)) получаем

$$P_{\alpha_2\sigma\gamma}^{\bar\beta} = 0 \tag{4}$$

на m-поверхности $S_{m,2}$. Поэтому с учетом ([1], (31)) и (2) справедлива

Т е о р е м а 1. Линейное подпространство $\Gamma_{m-2} \subset L_m$ в каждой точке $A_0 \in S_{m,2}$ является неподвижным при проективном преобразовании $P(v,w), \forall v \in L_m, \forall w \in L_m$. Точка A_0 – ядро преобразования $P(v,w)$, $\forall v,w \in L_m$.

2. Расслоение $N_{m,n-m} = (S_m, P_{I0})$

Базой нормального расслоения $N_{m,n-m}$ является m-поверхность S_m, а слоем, соответствующим каждой точке $A_0 \in S_m$, является нормаль Картана P_{I0}. В этом расслоении существует проективная связность N, которая отображает смежную нормаль P'_{I0} на исходную P_{I0} в направлении L_m. Формами этой связности являются $\omega_{\hat\alpha}^{\hat\beta}$, которые в силу ([I], (I)-(3), (II), (23)) удовлетворяют структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega_{\hat\alpha}^{\hat\beta} = \omega_{\hat\alpha}^{\hat\gamma} \wedge \omega_{\hat\gamma}^{\hat\beta} + N_{\hat\alpha\sigma\gamma}^{\hat\beta}\, \omega_0^\sigma \wedge \omega_0^\gamma. \tag{5}$$

Здесь компоненты тензора кручения-кривизны $N_{\hat\alpha\sigma\gamma}^{\hat\beta}$ определяются по формулам:

$$N_{\hat\alpha\sigma\gamma}^{\hat\beta} = -\frac{1}{2} A_{\hat\alpha[\sigma}^{\alpha} A_{|\alpha|\gamma]}^{\hat\beta}. \tag{6}$$

Этот тензор каждой паре направлений $v = (A_0 A_\sigma) v^\sigma \in L_m$ и $w = (A_0 A_\gamma) w^\gamma \in L_m$ сопоставляет проективитет подпространства P_{I0} в себя:

$$N(v,w) = \left\{ N_{\hat\alpha\sigma\gamma}^{\hat\beta} v^\sigma w^\gamma \right\}. \tag{7}$$

Геометрическая характеристика этого проективитета аналогична характеристике проективитета $R(v,w)$ в ([4], (8)).

Из ([1], (26)-(31)) и (4) получаем следующие равенства на соответствущих оснащенных m-поверхностях:

$S_m^1:\ N_{n+1,\sigma\gamma}^{n+1} = 0,\quad N_{n+1,\sigma\gamma}^{a} = 0;$

$S_m^2:\ N_{n+1,\sigma\gamma}^{a} = 0,$

$S_m^4 \Rightarrow S_m^3:\ N_{a,\sigma\gamma}^{n+1} = 0.$

Поэтому с учетом ([1], (25)) справедлива

Т е о р е м а 2. Точка A_{n+1} – ядро в каждой точке $A_0 \in S_m^1$ и неподвижна для каждой точки $A_0 \in S_m^2$ при проективитете $N(v,w)$, $\forall v,w \in L_m$. Линейное подпространство Γ_{n-m-1} неподвижно при проективитете $N(v,w), \forall v,w \in L_m$ в каждой точке $A_0 \in S_m^4 \Rightarrow A_0 \in S_m^3$.

3. Аффинное расслоение $A_{m,n} = (S_m, \Gamma_n)$.

Базой расслоенного пространства $A_{m,n}$ является m-поверхность S_m, а слоем, соответствующим каждой точке $A_0 \in S_m$, является гиперплоскость Γ_n ([1], (25)). В этом расслоении существует аффинная связность A с формами связности $\overset{*}{\omega}{}_p^q = \omega_p^q - \delta_p^q \omega_{n+1}^{n+1}$ $(p,q,s = \overline{0,n})$, которые в силу ([1], (1)-(3), (11), (23)) удовлетворяют структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\overset{*}{\omega}{}_p^q = \overset{*}{\omega}{}_p^s \wedge \overset{*}{\omega}{}_s^q + A_{p\sigma\gamma}^{q}\, \omega_0^\sigma \wedge \omega_0^\gamma. \tag{8}$$

Здесь компоненты тензора кручения-кривизны определяются по формулам

$$A_{o\sigma\gamma}^{o} = -\frac{1}{2} A_{n+1[\sigma}^{t} A_{|t|\gamma]}^{n+1}, \quad A_{o\sigma\gamma}^{t} = 0,$$

$$A_{t\sigma\gamma}^{q} = \frac{1}{2} A_{t[\sigma}^{n+1} A_{|n+1|\gamma]}^{q} - \frac{1}{2}\delta_t^q A_{n+1[\sigma}^{\alpha} A_{|\alpha|\gamma]}^{n+1} - \tag{9}$$

$$-\frac{1}{2}\delta^q_t A^a_{n+1[\sigma} A^{n+1}_{|a|\gamma]} \quad (p,q,s=\overline{0,n};\ a,b,c=\overline{m+1,n};\ \alpha=\overline{1,m}).$$

Заметим, что тензор $A^q_{p\sigma\gamma}$ каждой паре направлений $v,w\in L_m$ сопоставляет центропроективное преобразование гиперплоскости Γ_n в себя с центром в точке A_0:

$$A(v,w)=\{A^q_{p\sigma\gamma}v^\sigma w^\gamma\}. \tag{10}$$

Геометрическая характеристика этого преобразования такая же, как и преобразования $R(v,w)$ в ([4], (8)).

Заметим с учетом ([1], (21), (24),(25)), что проективите[т] (10) разбивается на два подпроективитета:

1) центропроективное преобразование m-плоскости L_m в себя с центром в точке A_0:

$$\overset{(1)}{A}(v,w)=\{A^{\beta}_{\alpha\sigma\gamma}v^\sigma w^\gamma\}, \tag{11}$$

который геометрически характеризуется следующим образом:

$$X\in L_m \Rightarrow Y=\overset{(1)}{A}(v,w)X=L_m\cap[A(v,w)X\cup\Gamma_{n-m-1}],\ \forall v,w\in L_m;$$

2) проективитет $(n-m-1)$-плоскости Γ_{n-m-1} в себя:

$$\overset{(2)}{A}(v,w)=\{A^b_{a\sigma\gamma}v^\sigma w^\gamma\} \tag{12}$$

такой, что

$$Z\in\Gamma_{n-m-1}\Rightarrow V=\overset{(2)}{A}(v,w)Z=\Gamma_{n-m-1}\cap[A(v,w)Z\cup L_m],\ \forall v,w\in L_m.$$

Из ([1], (28)-(32)) и (9) следует, что на оснащенных m-поверхностях выполняются следующие состношения:

$$S^1_m \text{ или } S^2_m:\ A^\alpha_{a\sigma\gamma}=0;\quad S^3_m \text{ или } S^4_m:\ A^a_{\alpha\sigma\gamma}=0;$$

$$S_{m,\tau}:\ A^{\alpha_1}_{\alpha_2\sigma\gamma}=0,\ A^a_{\alpha_2\sigma\gamma}=0;\quad S^{1234}_m:\ A^q_{p\sigma\gamma}=0.$$

Поэтому с учетом (9)-(12) и ([1], (2), (24) (31), (12)) имеет место

Т е о р е м а 3. Линейное подпространство Γ_{n-m-1} неподвижно при проективитетах $A(v,w),\forall v,w\in L_m$ в каждой точке $A_0\in S^1_m$ [...] $A_0\in S^2_m$. Линейное подпространство $\Gamma_{m-\tau}$ неподвижно при проект[и]витетах $A(v,w),\forall v,w\in L_m$ в каждой точке $A_0\in S_{m,\tau}$. Аффинная связность A расслоения $A_{m,n}$ локально-плоская в каждой точке $A_0\in S_m^{12}$ [...] Точка $A_0\in S_m$ неподвижна при проективитетах $A(v,w),\forall v,w\in L_m$.

Библиографический список

1. И в л е в Е.Т. Об одной классификации оснащенных мно[го]гомерных поверхностей проективного пространства // Дифференци[...]

[...]альная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.49-56.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. С.7-246.

3. Л у м и с т е Ю.Г. Канонические расслоения над пространствами орбит и внутренние связности // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.285-307.

4. И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. Вып.15. С.32-37.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИЯ ПАР КОНИК СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ ФОКАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИИРОВАННЫХ КВАДРИК

Л.Г.К о р с а к о в а

(Калининградский государственный университет)

В пространстве P_3 исследуется конгруэнция пар коник C_1,C_2 с несовпадающими плоскостями, имеющих пару общих точек, и ассоциированная с ней конгруэнция квадрик, на каждой квадрике которой фокальное многообразие [1] содержит конику C_1 конгруэнции (C_1). Изучен частный класс конгруэнций, в которых поверхность, описанная вершиной репера, является огибающей для семейства плоскостей коник C_1.

Трехмерное проективное пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где A_1 и A_2 – общие точки коник C_1 и C_2, A_3 и A_4 – полюсы прямой A_1A_2 соответственно относительно коник C_1 и C_2. При надлежащей нормировке вершин репера уравнения коник C_1 и C_2 в репере R запишутся в виде:

$$f_1\equiv(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0;\quad f_2\equiv(x^4)^2-2x^1x^2=0,\ x^3=0. \tag{1}$$

Деривационные формулы репера R имеют вид $dA_\alpha=\omega^\beta_\alpha A_\beta$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, причем формы Пфаффа ω^β_α удовлетворяют структурным уравнениям $D\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma$ и условию $\omega^\alpha_\alpha=0$. Считая, что плоскости коник C_1 и C_2 описывают двумерные многообразия,